Chapitre 4

Barbells : Concepts et Stratégies

Nous commençons par analyser qualitativement une position obligataire long et short en fonction du delta (sensibilité actuarielle), gamma (convexité actuarielle) et theta (portage). Ces compléments d'informations sur les obligations nous seront utiles dans la construction et l'analyse des positions de Butterfly et des stratégies associées. On appelle butterfly une position obligataire dans laquelle on est simultanément long d'une obligation de maturité quelconque (bullet) et short de deux obligations sur des maturités adjacentes (barbell). Il existe deux types de butterfly (ou de barbell) selon les contraintes de couvertures utilisées pour construire le barbell en fonction de la taille (montant nominal) sur le bullet. Un butterfly « Duration/Cash-Neutral » est construit de telle sorte que les market values et les durations soient identiques sur le barbell et le bullet. Un butterfly « Shift/Twist-neutral » est construit de telle sorte que la position globale est insensible au risque de shift et de twist (actuariels). On étudie ces deux types de butterfly en précisant les contraintes de couvertures, les montants nominaux pour le barbell, le spread de convexité, l'analyse du P/L et les contextes d'utilisation.

4.1 Analyse des Positions Obligataires

On poursuit dans cette section l'étude des obligations à taux fixe « in fine » commencée au Chapitre 3. Une position obligataire peut, à l'instar de ce que l'on fait usuellement sur le marchés des options, s'analyser en terme de « greeks ». Nous allons donner les formules des trois principaux « greeks » à prendre en compte pour analyser une position obligataire simple et montrer comment ces formules peuvent êtres étendues au cas d'un portefeuille obligataire. Ces compléments d'informations sur les obligations à taux fixe « in fine » nous seront utiles dans la construction et l'analyse des barbells obligataires à la section 4.2.

4.1.1 Calcul des « greeks » d'une Position Obligataire

Considérons un titre obligataire distribuant les cashflows $\mathrm{F_i}$ aux dates $\mathrm{t_i}$ (i=1...N). Le prix de ce titre est fonction de son taux actuariel $\mathrm{R_{act}}$ et du temps t :

$$P\left(R_{act};\, t\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{\left(1 + R_{act}\right)^{t_i - t}}$$

avec les notations classiques suivantes :

- $\mathrm{t_i}$: i+1-$\mathrm{f_{cc}}$$(1 \leq \mathrm{i} < \mathrm{N})$

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

– F_i: Cashflow à la date t_i ($1 \leq i < N$)

La variation de valeur instantannée de cette position obligataire peut être résumée par les éléments suivants :

– Delta : Sensibilité actuarielle
– Gamma : Convexité actuarielle
– Theta : Passage du temps (Portage – financement inclus)

Donnons les formules du delta, du gamma et du theta de notre position obligataire.

Le **delta** correspond à la dérivée première de $P(R_{act};t)$ par rapport au taux actuariel R_{act} :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial R_{act}} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{-F_i \times (t-t_i) \times (1+R_{act})^{t_i-t-1}}{(1+R_{act})^{2\times(t_i-t)}} \\ &= \frac{1}{(1+R_{act})} \sum_{i=1}^{N} \frac{-F_i \times (t-t_i)}{(1+R_{act})^{t_i-t}} \\ &= \frac{P}{(1+R_{act})}\left[\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{N} \frac{-F_i \times (t-t_i)}{(1+R_{act})^{t_i-t}}\right]\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial R_{act}} = -\frac{D}{(1+R_{act})} \times P$$

On constate que le delta (ou sensibilité actuarielle) d'une position obligataire est négatif, les prix évoluent en sens inverse des taux.

Le **gamma** correspond à la dérivée seconde de $P(R_{act};t)$ par rapport au taux actuariel R_{act}.

Partons de l'expression suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial R_{act}} = \frac{1}{(1+R_{act})} \sum_{i=1}^{N} \frac{-F_i \times (t-t_i)}{(1+R_{act})^{t_i-t}}$$

En dérivant cette expression par rapport à R_{act}, on obtient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R_{act}^2} = \frac{1}{(1+R_{act})^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i \times (t-t_i) \times (t-t_i+1)}{(1+R_{act})^{t_i-t}}$$

On constate que la convexité d'un titre obligataire est une quantité positive quel que soit le taux actuariel R_{act}. En conséquence :

– A la baisse du taux actuariel : le prix monte plus que prévu par son approximation linéaire
– A la hausse du taux actuariel : le prix baisse moins que prévu par son approximation linéaire

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Le graphique 4.1 ci-dessous permet de comprendre l'erreur réalisée lorsque l'on calcule la variation du prix d'une obligation à partir d'une approximation linéaire (delta).

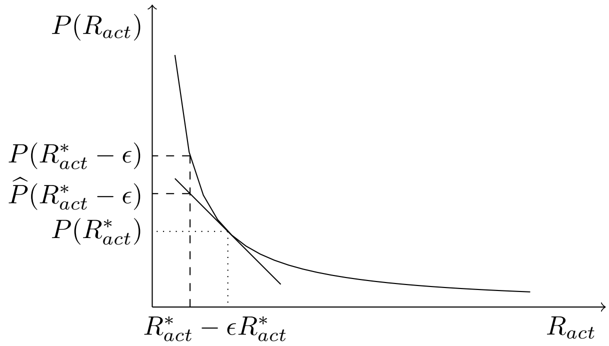

FIG. 4.1 – *Convexité de la Relation Prix-Taux*

Notons que la prise en compte de la convexité permet de réduire sensiblement cette erreur mais en aucun cas de l'annuler [1].

La convexité d'une obligation est très liée à la façon dont les cashflows sont distribués autour de la duration de l'obligation en terme de montants et de distance.

Pour le montrer, il faut introduire le concept de dispersion.

La dispersion d'un échéancier de cashflows mesure la façon dont les cashflows de cet échéancier sont répartis autour de la duration de cet échéancier. La dispersion M est définie par la formule :

$$M = \sqrt{\frac{1}{P} \times \sum_{i=1}^{N} (t_i - D)^2 \times V_i} \qquad avec \qquad V_i = \frac{F_i}{(1 + R_{act})^{t_i}}$$

En réarrangeant les termes dans la définition de la convexité donnée précédemment, on obtient une expression de la convexité en fonction de la dispersion et de la duration [2] :

$$C = \frac{M^2 + D^2 + D}{(1 + R_{act})^2}$$

On a en effet :

$$\begin{aligned}
(1 + R_{act})^2 \times C &= \frac{1}{P} \times \sum_{i=1}^{N} (t_i + 1) \times t_i \times V_i \\
&= \frac{1}{P} \times \sum_{i=1}^{N} \left[(t_i - D)^2 + 2 \times t_i \times D - D^2 + t_i \right] \times V_i \\
&= \frac{1}{P} \times \sum_{i=1}^{N} (t_i - D)^2 \times V_i + \frac{2 \times D}{P} \times \sum_{i=1}^{N} t_i \times V_i \\
&\quad -\frac{D^2}{P} \times \sum_{i=1}^{N} V_i + \frac{1}{P} \times \sum_{i=1}^{N} t_i \times V_i
\end{aligned}$$

1. Pour celà il faudrait prendre en compte les termes d'ordres supérieurs dans le développement limité de $P(R_{act})$ au voisinage de R^*_{act}

2. Cf. Valtonen E. (1998), Barbells - A Nordic perspective, Research Paper Handelsbanken

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Donc au final, on a bien :

$$(1 + R_{act})^2 \times C = M^2 + D^2 + D$$

Ce qui termine la démonstration.

On constate donc qu'à duration et taux actuariel donnés, la convexité est une fonction croissante de la dispersion [3].

Le **theta** correspond à la dérivée première de $P(R_{act}; t)$ par rapport au temps t.

On a :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{(1 + R_{act})^{t_i - t}} \right] \times \frac{\partial (1 + R_{act})^t}{\partial t}$$

Ecrivons $(1 + R_{act})^t$ sous la forme $e^{t \times Log(1+R_{act})}$, on obtient :

$$\frac{\partial (1 + R_{act})^t}{\partial t} = e^{t \times Log(1+R_{act})} \times Log(1 + R_{act}) = (1 + R_{act})^t \times Log(1 + R_{act})$$

Comme $Log(1 + R_{act})$ est équivalent à $\mathrm{R_{act}}$ pour $\mathrm{R_{act}}$ petit devant 1, on a finalement :

$$\frac{\partial P}{\partial t} \simeq R_{act} \times P$$

Le theta de l'obligation, aussi appelé portage, mesure l'appréciation de la valeur de l'obligation liée au passage du temps.

<u>A titre d'exemple</u>, le tableau 4.1 ci-dessous donne les « greeks » ainsi que la duration modifiée de trois obligations « au pair » de maturités respectives 5A, 7A et 10A.

	5A	7A	10A
Coupon	3%	3.25%	3.5%
Delta	-4.579	-6.171	-8.316
Gamma	0.261	0.462	0.838
Theta	3	3.25	3.5
Duration Modifiée	4.759	6.172	8.316

TAB. 4.1 – Exemple - Calcul des « Greeks »

Les calculs intermédiaires (applications directes des formules précédentes) ne sont pas reproduits ici.

3. Ce résultat nous sera utile lors du paragraphe 4.2.3

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

4.1.2 Calcul des « greeks » d'un Portefeuille Obligataire

Considérons maintenant le cas d'un portefeuille obligataire constitué de K obligations distinctes T_k (k=1...K) investies pour des montants nominaux respectifs N_k (k=1...K) que l'on suppose positifs.

La valeur V du portefeuille est donnée par la formule :

$$V = \sum_{k=1}^{K} V_k\left(R_{act,k}\right) \qquad avec \qquad V_k\left(R_{act,k}\right) = N_k \times P_k\left(R_{act,k}\right)$$

avec les notations suivantes :

- V_k: Contribution du titre T_k à la valeur du portefeuille
- P_k: Prix du titre T_k en %
- N_k: Montant nominal du titre T_k
- $R_{act,k}$: Taux actuariel du titre T_k

Le calcul des « greeks » de notre portefeuille obligataire est envisageable de deux façon différentes :

1. De façon exacte (non-linéaire) en raisonnant au niveau des cashflows (échéancier)
2. De façon approchée (linéaire) en raisonnant au niveau des obligations (portefeuille)

4.1.2.1 Calculs Non-Linéaires/Exacts

Si l'on raisonne à partir des cashflows individuels, on retrouve la situation décrite dans le paragraphe 4.1.1 précédente puisque nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur la fréquence et les montants des cashflows $\{F_i\}_{i=1\ldots N}$ dans les formules données dans ce paragraphe. Il est néanmoins nécessaire de définir un taux de rendement actuariel unique R_{act} pour cet échéancier de cashflows dont on connait la valeur actuelle V.

On calcule le taux actuariel R_{act} de cet échéancier comme si il s'agissait d'une obligation classique en « inversant » la relation prix-taux suivante :

$$V\left(R_{act}\right) = \sum_{k=1}^{K} V_k\left(R_{act,k}\right)$$

Les expressions de part et d'autre du signe égal sont des sommes des cashflows actualisés avec :

- Dans la partie à gauche de l'égalité chaque cashflow est actualisé au taux actuariel unique R_{act}
- Dans la partie à droite de l'égalité chaque cashflow est actualisé au taux actuariel correspondant à l'obligation à laquelle ce cashflow appartient

Mathématiquement, cette expression définie implicitement le taux actuariel R_{act} de l'échancier de cashflows comme une fonction ϕ des taux actuariels $\{R_{act,k}\}_{k=1\ldots K}$ des obligations constituants notre portefeuille obligataire :

$$R_{act} = \phi\left(R_{act,1}, R_{act,2}, \ldots, R_{act,K}\right)$$

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

On est dans le cadre d'application du théorème des fonctions implicites[4] et on montre qu'une telle fonction ϕ existe bien compte tenu des « bonnes » propriétés des fonctions V et V_k (k=1...K). En pratique, le taux actuariel R_{act} est calculé numériquement comme dans le cas d'une obligation à taux fixe « in fine » classique.

Ayant posé le problème de cette façon, les formules données dans la sous-section 4.1.1 s'appliquent directement à notre portefeuille obligataire.

4.1.2.2 Calculs Linéaires/Approchés

Une autre façon de procéder consiste à raisonner au niveau des obligations constitutives du portefeuille obligataire et à postuler que les « greeks » du portefeuille (pour EUR100 de nominal) peuvent êtres calculées comme des moyennes des « greeks » des obligations individuelles pondérées par les montants nominaux.

Plus précisément, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\delta &= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \times \delta_k \\
\gamma &= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \times \gamma_k \\
\theta &= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \times \theta_k
\end{aligned}$$

avec :

$$\alpha_k = \frac{N_k}{N} \ (k = 1 \ldots K) \qquad et \qquad N = \sum_{k=1}^{K} N_k$$

Il s'agit ici de formules approchées et en aucun cas de formules exactes sauf dans le cas trés spécifique où la courbe des taux est plate, auquel cas on a :

$$R_{act} = R_{act,1} = R_{act,2} = \ldots = R_{act,K}$$

Ces formules sont souvent accompagnées dans la littérature par deux approximations du même type pour le taux actuariel R_{act} du portefeuille :

1. Simple Weighting Yield (SWY)
2. Duration Weighting Yield (DWY)

La formule la plus simple consiste à calculer le taux actuariel du portefeuille comme la moyenne des taux actuariels des obligations individuelles pondérées par les market values (SWY) :

$$R_{act} = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \times R_{act,k}$$

4. Le théorème des fonctions implicites est un résultat classique de l'étude des fonctions vectorielles que l'on trouvera par exemple dans le livre de A. Doneddu, *Nouveau Cours de Mathématiques - Tome 5 : Fonctions Vectorielles, Séries et Equations différentielles*, Editions Vuibert

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

avec :

$$\beta_k = \frac{V_k}{V} \ (k = 1 \ldots K) \qquad et \qquad V = \sum_{k=1}^{K} V_k$$

Une autre approche consiste à calculer $\mathrm{R_{act}}$ comme la moyenne des taux actuariels des obligations individuelles pondérés par le produit des market values par les durations (DWY) :

$$R_{act} = \frac{\sum_{k=1}^{K} V_k \times D_k \times R_{act,k}}{\sum_{k=1}^{K} V_k \times D_k}$$

Notons que si, par analogie avec le calcul de la duration d'une obligation, on considère de plus que la duration du portefeuille peut être calculée comme la moyenne des durations des obligations individuelles pondérées par leurs market values :

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{K} V_k \times D_k}{\sum_{k=1}^{K} V_k}$$

la formule précédente de $\mathrm{R_{act}}$ peut alors être reformulée de la façon suivante (formule « courante » du DWY) :

$$R_{act} = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \times \frac{D_k}{D} \times R_{act,k}$$

La première formule (SWY) a le mérite, en plus de sa simplicité, d'être cohérente avec la formule de calcul du portage du portefeuille obligataire. Par contre, elle est (empiriquement) moins précise que la seconde formule (DWY) en tant que valeur approchée du taux de rendement actuariel du portefeuille.

Les formules données ci-dessus sont des approximations couramment mentionnées dans la littérature professionnelle[5] et utilisées sur les marchés, elles n'ont donc pas à être démontrées. La valeur de ces formules notamment pour les professionnels résulte d'un compromis entre précision numérique, expressivité formelle et simplicité computationnelle.

4.1.3 Analyse d'une Position Obligataire

On considère une position obligataire quelconque qui, comme nous venons de le voir, peut être une obligation unique (sous-section 4.1.1) ou un portefeuille obligataire normalisé (sous-section 4.1.2).

Deux approches sont envisageables pour analyser le P/L de cette position obligataire (financement inclus) sur une période donnée [t, t+Δt] :

1. L'approche **analytique** qui consiste à décomposer le P/L de notre position obligataire sur les différents « facteurs » (au sens général du terme) que sont le delta, le gamma et le theta
2. L'approche **synthétique** qui consiste à calculer le « point mort » de la position obligataire à l'horizon d'investissement (t+Δt) qui n'est autre que le taux forward de la position obligataire à cet horizon

Ces deux approches sont complémentaires.

5. Voir par exemple, Paul Fage, *Yield Calculations*, CSFB Research, October 1986

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

4.1.3.1 Approche Analytique (« Greeks »)

En différençiant le prix P(R_{act},t) de cette position obligataire au deuxième ordre par rapport à R_{act} et au premier ordre par rapport à t, on obtient :

$$dP \simeq \frac{\partial P}{\partial R_{act}} \times dR_{act} + \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 P}{\partial R_{act}^2} \times dR_{act}^2 + \frac{\partial P}{\partial t} \times dt$$

Expression qu'il est possible de réécrire en utilisant les « greeks » unitaires calculés précédemment à savoir le delta (sensibilité), le gamma (convexité) et le theta (portage) :

$$\triangle P \simeq \delta \times \triangle R_{act} + \frac{1}{2} \times \gamma \times \triangle R_{act}^2 + \theta \times \triangle t$$

Ainsi, une position obligataire peut s'analyser en terme de « greeks » de la même façon qu'une position optionnelle. Le tableau suivant donne les profils de risque en delta, gamma et theta d'une position obligataire simple (long et short), hors financement.

	Position Obligataire	
	Long	Short
Delta	Négatif (-) « Les prix montent lorsque les taux baissent »	Positif (+)« Les prix baissent lorsque les taux montent »
Gamma	Positif (+) « ils montent d'autant plus que la convexité est importante »	Négatif (-) « Ils baissent d'autant moins que la convexité est importante »
Theta	Positif (+) « Acheter un titre obligataire c'est prêter de l'argent avec intérêt »	Négatif (-) « Vendre un titre obligataire c'est emprunter de l'argent avec intérêt »

TAB. 4.2 – Analyse d'une Position Obligataire

Supposons que l'on finance l'achat du titre obligataire au taux repo r sur la période de portage Δt de la position, le portage total (obligation + financement) s'écrit alors :

$$Portage\,Total = P \times (R_{act} - r) \times \triangle t$$

On constate que le portage total (financement inclus) dépend de la pente de la courbe des taux :

1. Lorsque la courbe des taux est croissante (« normale »), les taux LT sont supérieurs aux taux CT donc le portage total positif
2. Lorsque la courbe des taux est décroissante (« inversée »), les taux LT sont inférieurs aux taux CT donc le portage total négatif

C'est évidemment le constat inverse qui prévaut si la position est vendeuse sur l'obligation.

L'analyse réalisée dans cette section sur les « greeks » d'une position obligataire est importante sur le plan pratique car ces « greeks » servent à structurer des portefeuilles obligataires

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

(long/short) de façon à obtenir un profil « rendement-risques » souhaité par l'arbitragiste. **Il faut néanmoins garder à l'esprit que l'estimation de la variation de valeur du portefeuille à partir des « greeks » n'est qu'une approximation.** Cette approximation peut être suffisante pour des positions détenues sur des durées relativement courtes (quelques semaines) et/ou pour des objectifs en terme de variation de spread relativement faibles (quelques points de base).

4.1.3.2 Approche Synthétique (« Taux Forward »)

On sait (cf. Chapitre 2 et Exercice 3) que le taux forward d'une obligation calculé en t à l'horizon t+Δt n'est autre que le taux de cette obligation à cet horizon pour lequel la position obligataire à un P/L nul sur la période [t, t+Δt].

Ce taux forward correspond donc au « point mort » de la position obligataire, calculons-le.

Notre position obligataire consiste à être :

- Long de l'obligation (en cash) acheté au prix P (taux R)
- Short de l'obligation (en repo) au taux repo r

Cette position peut aussi s'interpréter comme un achat « forward » de l'obligation au prix « forward » :

$$P^{fwd} = P \times (1 + r \times \triangle t)$$

Si l'on note R_{act}^{fwd} le taux actuariel « forward » de cette obligation calculé en t pour un horizon t+Δt, par définition du taux de rendement actuariel, on peut alors écrire :

$$P^{fwd} = \sum_{k=1}^{K} \frac{F_k}{\left(1 + R_{act}^{fwd}\right)^{k-\triangle t}}$$

En combinant ces deux dernières expressions, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{F_k}{\left(1 + R_{act}^{fwd}\right)^{k-\triangle t}} = P \times (1 + r \times \triangle t)$$

Contrairement au cas d'un zéro-coupon, il n'y a pas de formule simple du taux actuariel « forward » R_{act}^{fwd} d'une obligation en fonction de son taux actuariel « spot » R_{act} et du taux repo r. Il doit être calculé numériquement à partir de l'équation précédente.

On peut néanmoins donner une formule approchée du taux forward en « regardant » notre position obligataire comme un zéro-coupon de maturité égale à sa duration :

$$R_{act}^{fwd} \simeq \left[\frac{(1 + R_{act})^{D}}{(1 + r \times \triangle t)}\right]^{1/D - \triangle t} - 1$$

Dans cette dernière formule, D est la duration de la position obligataire calculée en t.

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

4.2 Généralités sur les Barbells Obligataires

Considérons une obligation à taux fixe « in fine » quelconque dont on souhaite évaluer la « cherté » relative vis-à-vis des autres obligations de même nature. La solution proposée au Chapitre 3, consistant à construire un synthétique zéro-coupon de cette obligation, est théoriquement la meilleure possible puisque la couverture du titre obligataire est parfaite. Cependant en l'absence de marché des zéro-coupon il n'est pas possible de la mettre en œuvre en pratique.

Dans cette section, nous allons introduire le concept de barbell obligataire comme alternative concrète au synthétique zéro-coupon. La solution consiste à construire un synthétique actuariel de l'obligation à partir d'un portefeuille constitué de deux titres adjacents. L'objectif est donc d'obtenir un équivalent-actuariel d'une couverture théorique zéro-coupon de cette obligation en utilisant des instruments de même nature négociables sur le marché.

4.2.1 Barbell vs Bullet Obligataire (Butterfly)

On note MT (Moyen Terme), l'obligation à pricer/couvrir (bullet).

Un barbell pour cette obligation MT est une couverture actuarielle de cette obligation créée à partir de deux autres obligations CT (Court Terme) et LT (Long Terme) dont les maturités respectives encadrent la maturité de l'obligation à couvrir. Si $\mathrm{D_{CT}}$, $\mathrm{D_{MT}}$ et $\mathrm{D_{LT}}$ sont les durations respectives des obligations CT, MT et LT, on a :

$$\boxed{\mathrm{D_{CT}} < \mathrm{D_{MT}} < \mathrm{D_{LT}}}$$

Dans ce cadre, **l'obligation d'origine est appelée bullet tandis que le portefeuille constitué des deux obligations de couverture est appelé barbell.** La position globale, (long vs short) du barbell et (short vs long) du bullet est appelée (long vs short) butterfly.

$$\boxed{\text{(Long/Short) Butterfly} = \text{(Long/Short) Barbell} + \text{(Short/Long) Bullet}}$$

Le graphique ci-dessous illustre une position de (long) butterfly dans une courbe des taux « normale » (les flêches représentent les sensibilités actuarielles des positions obligataires).

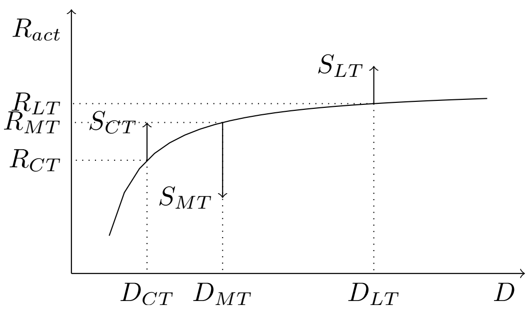

FIG. 4.2 – *Position de Butterfly*

Comment reconstituer un synthétique « actuariel » du titre MT à partir des titres adjacents de maturités CT et LT ? On se donne deux contraintes de couvertures permettant le calcul des montants nominaux $\mathrm{N_{CT}}$ et $\mathrm{N_{LT}}$ des titres CT et LT pour un montant nominal $\mathrm{N_{MT}}$ du titre MT donné.

Pour fixer les idées, considérons un barbell construit à partir des contraintes suivantes[6] :

1. Le butterfly est couvert en sensibilité (« shift-neutral »)

6. Les différentes structures de barbell et leurs propriétés respectives seront décrites à la section 4.3

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

2. Le butterfly a une market value nulle (« cash-neutral »)

En utilisant les notations précédentes, ces deux contraintes peuvent s'écrire de façon formelle[7] :

$$N_{MT} \times S_{MT} - N^*_{MT} \times S^*_{MT} = 0 \qquad (shift - neutral)$$

et

$$N_{MT} \times P_{MT} - N^*_{MT} \times P^*_{MT} = 0 \qquad (cash - neutral)$$

Notons qu'une conséquence triviale des contraintes de couverture précédentes est l'égalité entre les durations modifiées du bullet et du barbell :

$$D^{mod*}_{MT} = D^{mod}_{MT}$$

A ce stade, on suppose que l'on a calculé les montants nominaux $\mathrm{N_{CT}}$ et $\mathrm{N_{LT}}$ des obligations CT et MT du barbell à partir des contraintes de couverture propres à la structure de barbell choisie et en fonction du montant nominal $\mathrm{N_{MT}}$ du bullet.

Si V^*_{MT} est la market value du barbell, on a alors par construction :

$$V^*_{MT} = V_{CT} + V_{LT}$$

avec :

$$V_{CT} = N_{CT} \times P_{CT} \qquad et \qquad V_{LT} = N_{LT} \times P_{LT}$$

Comment calculer les propriétés actuarielles du barbell en fonction des propriétés individuelles des titres CT et LT et des montants nominaux $\mathbf{N_{CT}}$ et $\mathbf{N_{LT}}$?

On va simplement appliquer les résultats du paragraphe 4.1.2 et regarder notre barbell obligataire comme si il s'agissait d'une unique obligation. On commence par postuler que le montant nominal N^*_{MT} du barbell s'écrit comme la somme des montants nominaux $\mathrm{N_{CT}}$ et $\mathrm{N_{LT}}$ des obligations CT et LT qui le constituent :

$$N^*_{MT} = N_{CT} + N_{LT}$$

Les formules de calcul des principales propriétés unitaires du barbell sont regroupées dans le tableau 4.3[8].

7. En pratique, comme nous le verrons à la section 4.3, on calcule directement les montants nominaux des obligations N_{CT} et N_{LT} constitutives du barbell en fonction du montant nominal N_{MT} du bullet

8. D'une façon générale, on désigne par X_{MT} et X^*_{MT} les valeurs de la propriété X pour le bullet et le barbell respectivement. Les formules données dans le tableau 4.3 découlent du postulat précédent et des formules données au paragraphe 4.1.2

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Propriété	Notation	Formule
Prix (%)	P^*_{MT}	$\frac{N_{CT}\times P_{CT}+N_{LT}\times P_{LT}}{N^*_{MT}}$
Duration	D^*_{MT}	$\frac{V_{CT}\times D_{CT}+V_{LT}\times D_{LT}}{V^*_{MT}}$
Sensibilité	S^*_{MT}	$\frac{N_{CT}\times S_{CT}+N_{LT}\times S_{LT}}{N^*_{MT}}$
Convexité	Γ^*_{MT}	$\frac{N_{CT}\times \Gamma_{CT}+N_{LT}\times \Gamma_{LT}}{N^*_{MT}}$
Portage	$P^*_{MT}\times R^*_{MT}$	$\frac{N_{CT}\times P_{CT}\times R_{CT}+N_{LT}\times P_{LT}\times R_{LT}}{N^*_{MT}}$
SWY	R^*_{MT}	$\frac{V_{CT}\times R_{CT}+V_{LT}\times R_{LT}}{V_{CT}+V_{LT}}$
DWY	R^*_{MT}	$\frac{V_{CT}\times D_{CT}\times R_{CT}+V_{LT}\times D_{LT}\times R_{LT}}{V_{CT}\times D_{CT}+V_{LT}\times D_{LT}}$
Taux Repo	r^*_{MT}	$\frac{V_{CT}\times r_{CT}+V_{LT}\times r_{LT}}{V_{CT}+V_{LT}}$
DWY^{fwd}	R^{fwd*}_{MT}	$\frac{V_{CT}\times D_{CT}\times R^{fwd}_{CT}+V_{LT}\times D_{LT}\times R^{fwd}_{LT}}{V_{CT}\times D_{CT}+V_{LT}\times D_{LT}}$

TAB. 4.3 – Calcul des Propriétés Unitaires du Barbell

Comment interpréter le spread forward?

Le spread forward correspond à la différence entre le taux actuariel forward du bullet et le taux actuariel forward du barbell :

$$Spread^{fwd}_{DWY} = R^{fwd*}_{MT} - R^{fwd}_{MT}$$

Par analogie avec le taux forward, le spread forward calculé en t à l'horizon t+Δt est le niveau du spread actuariel en t+Δt pour lequel le P/L de la position sur la période [t, t+Δt] de butterfly est nul.

C'est donc le « point mort » de la position de butterfly à l'horizon t+Δt.

Quels sont les principales variables de décision?

A l'instar de l'analyse réalisée au Chapitre 3, les deux variables de décision principales pour une stratégie de butterfly sont le spread (entre les taux actuariels du barbell et du bullet) et le portage total (obligataire et financement repo).

Le spread de taux actuariel est la différence entre le taux actuariel du bullet et le taux actuariel du barbell :

$$Spread_{DWY} = R^*_{MT} - R_{MT}$$

Le portage total est la différence entre le spread (représentatif du portage obligataire) et la prime repo (représentatif du financement) :

$$Portage = Spread_{SWY} - Prime$$

La prime repo est la différence entre le taux repo du bullet et le taux repo du barbell :

$$Prime = r^*_{MT} - r_{MT}$$

Notons que pour les raisons données au paragraphe 4.1.2, le calcul du spread en tant que variable de trading est (généralement) réalisée en utilisant le DWY tandis que le calcul du spread en tant que mesure du portage obligataire est (toujours) réalisée en utilisant le SWY.

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

4.2.2 Analyse du P/L d'une Stratégie de Butterfly

Au Chapitre 3, nous avons présenté les stratégies de « relative value trading » et de « repo trades » de façon séparée pour la clareté de l'exposé. Dans ce paragraphe, nous allons calculer le P/L ex-ante d'une position de butterfly dans le cas général, c'est-à-dire sans faire d'hypothèse a priori ni sur la cherté relative du bullet vis-à-vis du barbell en cash ou en repo, ni sur la dynamique supposée du spread de taux entre le barbell et le bullet.

Supposons que le timing des opérations est le suivant :

- Date t : $\mathrm{Spread_t}$ (Entrée)
- Date t+Δt : $\mathrm{Spread_{t+\Delta t}}$ (Sortie)

Les opérations à réaliser dans le marché aux dates t et t+Δt sont décrites dans le tableau 4.4 ci-dessous.

Branches	Marchés	t	t+Δt
Bullet	Cash	Vente de N_{MT} du bullet au prix $P_{MT,t}$	Rachat de N_{MT} du bullet au prix $P_{MT,t+\Delta t}$
	Repo	Emprunt de N_{MT} du bullet au taux repo $r_{t,t+\triangle t}$ sur la période [t, t+Δt]	$n.a.$
Barbell	Cash	Achat de N^*_{MT} du barbell au prix $P^*_{MT,t}$	Rachat de N^*_{MT} du barbell au prix $P^*_{MT,t+\Delta t}$
	Repo	Prêt de N^*_{MT} du barbell au taux repo $r^*_{t,t+\triangle t}$ sur la période [t, t+Δt]	$n.a.$

TAB. 4.4 – Tableau des Opérations en t et t+Δt

Conformément à l'analyse faite au sous-paragraphe 4.1.3.1, le P/L de notre position de butterfly peut être décomposée en trois parties :

1. Le P/L lié à la variation du spread (Delta)
2. Le P/L lié au portage total (Portage)
3. Le P/L lié à la convexité de la position (Convexité)

Le P/L total n'est autre que la somme de ces trois composantes :

$$\boxed{P/L_{t,t+\triangle t} \simeq P/L^{DELTA}_{t,t+\triangle t} + P/L^{PORTAGE}_{t,t+\triangle t} + P/L^{CONVEXITE}_{t,t+\triangle t}}$$

Le P/L lié à la variation du spread (Delta) s'écrit de façon évidente comme la différence des P/L de même nature sur la partie longue (barbell) et la partie short (bullet) :

$$P/L^{DELTA}_{t,t+\triangle t} = N^*_{MT} \times S^*_{MT} \times \triangle_{t,t+\triangle t} R^*_{MT} - N_{MT} \times S_{MT} \times \triangle_{t,t+\triangle t} R_{MT}$$

En tenant compte de la contrainte de couverture en sensibilité (shift-neutral), ce P/L peut finalement être réécrit de la façon suivante :

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

$$\boxed{P/L^{DELTA}_{t,t+\triangle t} = V_{MT} \times D^{mod}_{MT} \times \triangle_{t,t+\triangle t} Spread}$$

Pour le calcul du P/L lié au portage total de la position de butterfly (Portage), il suffit d'appliquer la formule de calcul du portage total (position obligataire + financement en repo) à notre position de butterfly (long barbell / short bullet), on trouve :

$$P/L^{PORTAGE}_{t,t+\triangle t} = V^*_{MT} \times \left(R^*_{MT} - r^*_{t,t+\triangle t}\right) \times \triangle t - V_{MT} \times \left(R_{MT} - r_{t,t+\triangle t}\right) \times \triangle t$$

En tenant compte de la contrainte sur la market value du butterfly (cash-neutral), on trouve :

$$\boxed{P/L^{PORTAGE}_{t,t+\triangle t} = V_{MT} \times Portage \times \triangle t}$$

En appliquant la même logique au calcul du P/L lié à la convexité de la position (Convexité), on trouve :

$$P/L^{CONVEXITE}_{t,t+\triangle t} = N^*_{MT} \times \frac{\Gamma^*_{MT}}{2} \times \left[\triangle_{t,t+\triangle t} R^*_{MT}\right]^2 - N_{MT} \times \frac{\Gamma_{MT}}{2} \times \left[\triangle_{t,t+\triangle t} R_{MT}\right]^2$$

Plaçons-nous dans le cadre d'un déplacement parallèle uniforme (shift) des taux actuariels R_{MT} et R^*_{MT} de sorte que :

$$\triangle R_{MT} = \triangle R^*_{MT} = \triangle R \qquad (Shift)$$

On trouve finalement :

$$\boxed{P/L^{CONVEXITE}_{t,t+\triangle t} = \frac{1}{2} \times \left(N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT}\right) \times \left[\triangle_{t,t+\triangle t} R\right]^2}$$

On notera dans cette dernière formule que le facteur d'exposition à un mouvement parallèle uniforme des taux actuariels (shift) est construit comme la différence entre les convexités du barbell et du bullet pondérées par les montants nominaux :

$$\Gamma_{BUT} = N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT}$$

En tant que différence entre deux quantités ayant le même ordre de grandeur, la convexité d'un butterfly est a priori un facteur de second ordre qui ne peut être significatif (en terme de P/L) qu'en cas de crise ou de choc non anticipés impliquant un déplacement très important à la hausse ou la baisse de la courbe des taux.

Au final, cette décomposition (dont on rappelle qu'il s'agit d'une approximation) est très utile pour comprendre comment ces différents facteurs (au sens général du terme) contribuent au P/L total de la position de butterfly.

4.2.3 Biais de Convexité

Il existe un biais irréductible entre le taux actuariel du bullet et celui du barbell qui résulte de la différence de convexité entre le bullet et le barbell.

Un barbell est de fait généralement plus convexe que son bullet associé de sorte qu'une position longue sur un butterfly est convexe-positive.

$$\boxed{\Gamma_{BUT} > 0}$$

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Cette propriété des barbells peut se justifier par le fait qu'un barbell a de toute évidence une dispersion plus grande que le bullet du fait de sa structure de cashflows qui intègre deux cashflows principaux sur les maturités CT et LT pour un seul pour le bullet sur la maturité MT. Toutes choses égales par ailleurs (en particulier, duration et taux actuariel), un barbell a donc une convexité (unitaire) plus grande que le bullet en vertu du résultat donné au paragraphe 4.1.1. Bien que la convexité de la position globale (butterfly) résulte de contraintes de couverture non parfaitement compatibles avec le raisonnement précédent, on constate empiriquement que la position globale (butterfly) consistant à être long du barbell et short du bullet est en général convexe-positive [9].

Cette propriété remarquable des barbells a pour corollaire que le spread de taux actuariel d'équilibre entre le bullet et le barbell est non nul du fait de la **prime de convexité** que le détenteur du barbell doit payer pour bénéficier de ce surcroît de convexité (par rapport au bullet).

Pour le prouver, calculons la variation de valeur du butterfly en utilisant l'approximation donnée au paragraphe 4.1.3.1 pour le calcul de la variation de valeur du bullet et du barbell.

On a :

$$\triangle P_{MT} \simeq S_{MT} \times \triangle R_{MT} + \frac{1}{2} \times \Gamma_{MT} \times [\triangle R_{MT}]^2 + R_{MT} \times P_{MT} \times \triangle t$$

et

$$\triangle P^*_{MT} \simeq S^*_{MT} \times \triangle R^*_{MT} + \frac{1}{2} \times \Gamma^*_{MT} \times [\triangle R^*_{MT}]^2 + R^*_{MT} \times P^*_{MT} \times \triangle t$$

Partons de la valeur de marché du butterfly :

$$V_{BUT} = N^*_{MT} \times P^*_{MT} - N_{MT} \times P_{MT}$$

En différençiant cette expression à l'ordre 2 par rapport à R et à l'ordre 1 par rapport au temps t et en se plaçant dans le cas d'un déplacement parallèle uniforme (shift) des taux actuariels R_{MT} et R^*_{MT} de sorte que :

$$\triangle R_{MT} = \triangle R^*_{MT} = \triangle R$$

On trouve :

$$\begin{aligned} \triangle V_{BUT} &\simeq \frac{1}{2} \times (N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT}) \times [\triangle R]^2 \\ &+ (V^*_{MT} \times R^*_{MT} - V_{MT} \times R_{MT}) \times \triangle t \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'espérance mathématique de $\Delta \mathrm{V}_{\mathrm{BUT}}$ en tenant compte de la contrainte de construction portant sur la market value du butterfly :

$$V^*_{MT} - V_{MT} = 0$$

On trouve :

$$E\left[\triangle V_{BUT}\right] \simeq \frac{1}{2} \times (N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT}) \times \sigma^2_{\triangle R} \times \triangle t + V_{MT} \times \overline{Spread} \times \triangle t$$

avec :

$$\sigma^2_{\triangle R} = E\left[\triangle R^2\right] \qquad et \qquad \overline{Spread} = E\left[R^*_{MT} - R_{MT}\right]$$

9. Le barbell et le bullet n'ont pas forcément la même duration ni le même taux actuariel mais les différences sont en général suffisamment faibles pour que la propriété soit vérifiée empiriquement

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Supposons de plus que la position a une convexité positive :

$$N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT} > 0$$

L'espérance mathématique de ΔV doit être nulle sous hypothèse d'AOA et on doit donc finalement avoir :

$$\overline{Spread} \simeq -\frac{(N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT}) \times \sigma^2_{\triangle R}}{2 \times N_{MT} \times P_{MT}}$$

Ce résultat montre que le taux actuariel d'un barbell doit être inférieur à celui du bullet pour compenser le surcroît de convexité du barbell par rapport au bullet et la volatilité anticipée du facteur de déplacement parallèle des taux actuariels [10].

4.3 Les Barbells Obligataires en Pratique

Il existe plusieurs façons de construire un barbell selon les contraintes de couverture choisies, le barbell « shift/cash-neutral » n'étant qu'une structure possible parmi d'autres [11].

On dinstingue généralement deux types de barbells :

- Les barbells « cash-neutral » qui n'ont pas d'impact en trésorerie
- Les barbells « twist-neutral » qui sont couverts contre le risque de twist

Pour chaque structure de barbell, nous allons expliciter les points suivants :

- Contraintes de couverture/structure
- Montants nominaux des obligations CT et MT du barbell
- Taux de rendement actuariel « approché » du barbell

La différence essentielle entre ces deux types de structures est liée aux facteurs actuariels pour lesquels la position est couverte ou pas. Le tableau 4.5 résume la situation :

	Facteurs			
Couverture	Type	Shift	Twist	Butterfly
« zéro-coupon »	ZC	Oui	Oui	Oui
Barbells « twist-neutral »	ACT	Oui	Oui	Non
Barbells « cash-neutral »	ACT	Oui	Non	Non

Tab. 4.5 – Couverture des Risques Factoriels

On notera que les couvertures de type « barbell » sont des couvertures imparfaites par construction du fait qu'elles ne couvrent pas la totalité des facteurs de déformation de la courbe des taux zéro-coupons. Cette remarque a des conséquences importantes en terme de trading qui feront l'objet du dernier paragraphe de cette section.

10. Il est parfois mentionné dans la littérature que ce caractère gamma-positif des positions (long) butterfly implique qu'il est préférable d'être long du butterfly plutôt que short du butterfly. En réalité, si le biais de convexité est correctement pricé, il n'y a aucun avantage à être long du butterfly puisque le caractère gamma-positif de la position se paye par un portage moindre

11. Pour une présentation complémentaire des différentes structures de butterfly, le lecteur pourra se référer à Martellini L., Priaulet P. & Priaulet S. (2002), « Understanding the Butterfly Strategy », RI Note n°2002-01 (Crédit Commercial de France)

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

4.3.1 Barbells de type « Cash-neutral »

Les barbells de type « cash-neutral » sont principalement utilisés dans un contexte de gestion pour compte de tiers. En particulier, l'activité de « bond switching » permet au gérant de contribuer à l'alpha du fond tout en respectant les contraintes de conservation de la market value et de la duration. Le gérant va remplacer un titre « cher » (bullet) par deux titres adjacents « moins chers » (barbell) sans que cette substitution n'ai d'impact sur la market value et la duration du fond.

La première contrainte consiste à imposer l'égalité des market values du barbell et du bullet ce qui formellement s'écrit :

$$N_{CT} \times P_{CT} + N_{LT} \times P_{LT} = N_{MT} \times P_{MT}$$

La seconde contrainte porte sur la conservation de la duration et consiste à imposer l'égalité des durations du barbell et du bullet. La duration est interprétée ici au sens général du terme qui, dans la littérature anglo-saxonne, peut se décliner en :

1. « Macauley-Duration » qui correspond à la duration classique
2. « $-Duration » qui correspond à la sensibilité

Les contraintes de couverture correspondantes s'écrivent respectivement :

$$V_{CT} \times D_{CT} + V_{LT} \times D_{LT} = V_{MT} \times D_{MT} \qquad (''duration - neutral'')$$

et

$$N_{CT} \times S_{CT} + N_{LT} \times S_{LT} = N_{MT} \times S_{MT} \qquad (''shift - neutral'')$$

Dans chacun des deux cas, les contraintes de structure/couverture constituent un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Le tableau 4.6 donne les formules de calcul des montants nominaux $\mathrm{N_{CT}}$ et $\mathrm{N_{LT}}$ des titres CT et LT pour un montant nominal $\mathrm{N_{MT}}$ du titre MT donné.

	N_{CT}	N_{LT}
cash/duration-neutral	$N_{MT} \times \frac{P_{MT}}{P_{CT}} \times \lambda_{CT}$	$N_{MT} \times \frac{P_{MT}}{P_{LT}} \times \lambda_{LT}$
cash/shift-neutral	$N_{MT} \times \frac{P_{MT}}{P_{CT}} \times \lambda_{CT}^{mod}$	$N_{MT} \times \frac{P_{MT}}{P_{LT}} \times \lambda_{LT}^{mod}$

TAB. 4.6 – Calcul des Montants Nominaux des Barbells « Cash-Neutral »

avec :

$$\lambda_{CT} = \frac{D_{LT} - D_{MT}}{D_{LT} - D_{CT}} \qquad et \qquad \lambda_{LT} = \frac{D_{MT} - D_{CT}}{D_{LT} - D_{CT}}$$

et

$$\lambda_{CT}^{mod} = \frac{D_{LT}^{mod} - D_{MT}^{mod}}{D_{LT}^{mod} - D_{CT}^{mod}} \qquad et \qquad \lambda_{LT}^{mod} = \frac{D_{MT}^{mod} - D_{CT}^{mod}}{D_{LT}^{mod} - D_{CT}^{mod}}$$

Pour chaque barbell, il est possible de calculer le taux actuariel « approché » R_{MT}^{*} en partant de la formule de calcul du P/L « approché » du butterfly au premier ordre par rapport aux taux actuariels des trois obligations CT, MT et LT :

$$\triangle V_{BUT} = N_{MT} \times S_{MT} \times \triangle R_{MT} - N_{CT} \times S_{CT} \times \triangle R_{CT} - N_{LT} \times S_{LT} \times \triangle R_{LT}$$

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

En remplaçant dans cette dernière expression les montants nominaux N_{CT} et N_{LT} des titres CT et LT par les formules données plus haut, on trouve les expressions suivantes du taux actuariel R^*_{MT} du barbell :

$$R^*_{MT} = \frac{D^{mod}_{CT}}{D^{mod}_{MT}} \times \lambda_{CT} \times R_{CT} + \frac{D^{mod}_{LT}}{D^{mod}_{MT}} \times \lambda_{LT} \times R_{LT} \qquad (\text{"}duration - neutral\text{"})$$

et

$$R^{mod*}_{MT} = \frac{D^{mod}_{CT}}{D^{mod}_{MT}} \times \lambda^{mod}_{CT} \times R_{CT} + \frac{D^{mod}_{LT}}{D^{mod}_{MT}} \times \lambda^{mod}_{LT} \times R_{LT} \qquad (\text{"}shift - neutral\text{"})$$

On montre facilement que **ces formules de calcul du taux de rendement actuariel du barbell sont du même type que le « Duration weighting Yield » (DWY)**. Il n'y a cependant d'égalité formelle que dans le cas des barbells de type « shift-neutral » en calculant le « Duration Weighting Yield » à partir des durations modifiées :

$$R^{mod*}_{MT} = D^{mod}WY$$

En pratique (et on le devine en comparant les équations), ces deux structures de barbell donnent des résultats assez proches (montants nominaux des obligations CT et MT et taux de rendement actuariel approché du barbell).

A titre d'exemple, calculons la structure d'un barbell 5A/10A permettant de couvrir un bullet 7A pour un montant de EUR 10M[12].

Le barbell est de type « Cash/Shift-neutral ».

Par application directe des formules précédentes, on trouve :

$$\begin{cases} N_{5A} = & EUR\,10M \times \frac{100}{100} \times \frac{8.316-6.172}{8.316-4.579} = EUR\,5.74M \\ N_{10A} = & EUR\,10M \times \frac{100}{100} \times \frac{6.172-4.579}{8.316-4.579} = EUR\,4.26M \end{cases}$$

Enfin, le taux de rendement actuariel « approché » du barbell est[13] :

$$R^{mod*}_{7A} = \frac{4.579}{6.172} \times \frac{8.316 - 6.172}{8.316 - 4.579} \times 3\% + \frac{8.316}{6.172} \times \frac{6.172 - 4.579}{8.316 - 4.579} \times 3.5\% = 3.287\%$$

Ce calcul montre que nos données de marchés fictives ne pricent pas le biais de convexité puisque le taux de rendement actuariel « approché » du barbell (3.287%) est supérieur à celui du bullet (3.25%).

4.3.2 Barbells de Type « Twist-neutral »

Ce type de barbell est principalement utilisé dans un contexte de trading et/ou d'arbitrage pour compte propre. Les positions étant auto-financées (repo), la contrainte de conservation de la market value n'est pas nécessaire. On utilisera un butterfly couvert en Shift et en Twist qui permet (par construction) un ajustement plus fin au niveau des risques.

Les deux contraintes de couverture sur ce type de barbell sont des contraintes de risques consistant à couvrir le butterfly sur les deux premiers facteurs de déformation de la courbe des taux actuariels :

- Risque de Shift Actuariel (1er facteur)

12. Les données sont celles de l'exemple numérique du paragraphe 4.1.1
13. L'erreur d'approximation est très inférieure à 1bp puisque le taux actuariel exact du bullet est 3.289%

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

– Risque de Twist Actuariel (2nd facteur)

La première contrainte de couverture (1er facteur) a déjà été donnée précédemment (« shift-neutral »).

La seconde contrainte de couverture (2nd facteur) peut être formulée dans le cas général en considérant que lors d'un mouvement de pentification, à une variation de -1 de la partie « courte » de la courbe des taux (MT/CT) doit correspondre une variation de β de la partie « longue » de la courbe des taux (LT/MT).

On est alors en mesure de définir les scénarios théoriques de Shift, Twist et Butterfly dans la courbe des taux actuariels constituée par R_{CT}, R_{LT} et R_{MT} [14].

$$Shift = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Twist = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \qquad Butterfly = \begin{bmatrix} \frac{-\beta}{1+\beta} \\ 1 \\ \frac{-1}{1+\beta} \end{bmatrix}$$

Le graphique 4.3 permet de visualiser la forme des facteurs de déformation de la courbe des taux actuariels dans le cas où β est égal à 0.5.

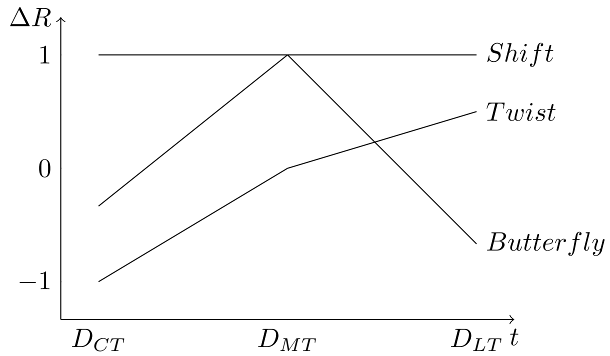

FIG. 4.3 – *Facteurs de Déformation de la Courbe des Taux ($\beta = 0.5$)*

Dans ce cadre, la seconde contrainte de couverture s'écrit :

$$-N_{CT} \times S_{CT} + \beta \times N_{LT} \times S_{LT} = 0 \qquad (\text{"}twist - neutral\text{"})$$

Comme précédemment, la résolution du système linéaire de deux équations à deux inconnues que constituent les contraintes de couvertures « shift-neutral » et « twist-neutral » permet de trouver les montants nominaux N_{CT} et N_{LT} des titres CT et LT pour un montant nominal N_{MT} du titre MT donné :

$$N_{CT} = N_{MT} \times \frac{\beta}{1+\beta} \times \frac{S_{MT}}{S_{CT}} \qquad et \qquad N_{LT} = N_{MT} \times \frac{1}{1+\beta} \times \frac{S_{MT}}{S_{LT}}$$

De même, on trouve facilement en procédant comme nous l'avons fait pour les barbells de type « cash-neutral » que le taux actuariel R^*_{MT} s'écrit :

$$R^*_{MT} = \frac{\beta}{1+\beta} \times R_{CT} + \frac{1}{1+\beta} \times R_{LT}$$

En pratique, deux approches sont couramment utilisées pour estimer β :

– La méthode « ad hoc »

14. Le facteur Butterfly est obtenu en imposant qu'il soit orthogonal aux facteurs Shift et Twist

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

– La méthode econométrique

La méthode « ad hoc » consiste à utiliser des valeurs spécifiques et remarquables du paramètre β dont les plus souvent citées et/ou utilisées sont :

- $\beta = 1$ (barbell « équi-pondéré »)
- $\beta = \frac{D_{MT}-D_{CT}}{D_{LT}-D_{MT}}$ (barbell « pondéré par les durations »)

Notons que le barbell « pondéré par les durations » a une variante consistant à remplacer les durations par les maturités [15].

La méthode économétrique consiste à estimer le paramètre β sur la base de données historiques des taux actuariels R_{CT}, R_{LT} et R_{MT}. En toute généralité, on peut décomposer le vecteur ΔR^{obs} des variations (observées) des taux actuariels R_{CT}, R_{LT} et R_{MT} sous la forme suivante :

$$\triangle R^{obs} = \underbrace{\triangle R^{th}}_{\in E^{\perp}_{Butterfly}} + \underbrace{\epsilon}_{\in D_{Butterfly}}$$

avec les notations suivantes :

- $E^{\perp}_{Butterfly}$ est le sous-espace vectoriel orthogonal au vecteur Butterfly
- $D_{Butterfly}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur Butterfly

Par construction, $\triangle R^{obs}$ vérifie l'équation suivante :

$$\left\langle \triangle R^{obs} | Butterfly \right\rangle = \underbrace{\left\langle \triangle R^{th} | Butterfly \right\rangle}_{0} + \underbrace{\langle \epsilon | Butterfly \rangle}_{\epsilon \times \|Butterfly\|^2}$$

En développant cette équation et en réarrangeant les termes de façon à faire apparaître les spreads de taux MT/CT et LT/MT, on trouve :

$$\triangle \left(R_{MT} - R_{CT}\right)^{obs} = \beta \times \triangle \left(R_{LT} - R_{MT}\right)^{obs} + \epsilon$$

En raisonnant non plus sur les variations de taux mais sur les niveaux de taux absolus, on peut reformuler cette dernière équation sous la forme du modèle économétrique linéaire suivant [16]:

$$\left(R_{MT} - R_{CT}\right)^{obs} = \beta \times \left(R_{LT} - R_{MT}\right)^{obs} + \gamma + \epsilon$$

Le paramètre β peut donc être estimé par régression du modèle linéaire précédent sur les données historiques dont on dispose. Dans ce cas, la valeur de β utilisée pour construire le barbell est l'estimateur des MCO $\hat{\beta}$ de β. Une application numérique de cette approche à la courbe des taux Etat Française sur les maturités 2A, 10A et 30A est donnée par X. Baraton [17].

15. Cf. Leroy F. (1996), « Analyse Comparative Risques spécifiques BIP vs Risques Statistiques - Etude par Type de Stratégie », Note Interne du Département des Risques, Banque Internationale de Placement
16. Dans ce cadre, β et γ sont les paramètres (à estimer) du modèle tandis que ε est un terme d'erreur dont on suppose qu'il est gaussien de moyenne nulle
17. Baraton X. (1998), « OAT FRF 2/10-Year vs 10/30-Year Slop Arbitrage : Econometric Modeling ans return to the mean », Fixed Income Research, Forex & Debt Market Division, CA Indosuez

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

4.3.3 Les Stratégies de Butterfly en Pratique

Sur le fond [18], les approches zéro-coupon et actuarielles relèvent de la même logique consistant à identifier des titres sur- ou sous-évalués (en cash ou en repo) et à monter des positions dans le marché (« relative value trading » ou « repo trades ») permettant de profiter de ces mis-pricing (retour du spread sur sa valeur d'équilibre ou portage de la prime repo). Sur la forme, l'approche actuarielle se distingue de l'approche zéro-coupon principalement par la nature de la couverture qui n'est plus locale (au niveau des cashflows) mais globale (on cherche à reproduire certaines propriétés de l'obligation qui diffèrent selon le type de barbell choisi). Cette remarque vaut pour les barbells « cash-neutral » (couverture 1er facteur uniquement) comme pour les barbells « twist-neutral » (couverture 1er et 2nd facteur) car même pour ces derniers, il reste un facteur actuariel non couvert.

Le spread actuariel est-il un bon indicateur de mis-pricing?

Cette différence de structure entre une couverture zéro-coupon et une couverture actuarielle n'est pas sans conséquence en terme de risques et de trading. Contrairement au spread zéro-coupon qui reflète uniquement le mis-pricing de l'obligation dans la courbe des taux zéro-coupon, le spread actuariel intègre quatre composantes distinctes :

1. La pure composante de mis-pricing
2. La dynamique du ou des facteurs résiduels (Butterfly en particulier)
3. Le biais de convexité qui dépend de la volatilité anticipée du 1er facteur (Shift)
4. La prime repo anticipée

De façon pseudo-formelle, on peut donc écrire [19] :

$$\boxed{Spread_{ACT} \simeq Mispricing + Spread_{Butterfly} + Convexity\ Bias + Prime_{repo}}$$

Contrairement au spread zéro-coupon, **une divergence du spread actuariel par rapport à sa valeur d'équilibre n'est donc pas nécessairement une indication de mis-pricing**. Cette différence de structure explique que les quelques résultats empiriques publiés sur ce sujet [20] montrent que les spreads actuariels ont des dynamiques non conformes avec un processus avec « retour à la moyenne » de type Ornstein–Uhlenbeck. Cette remarque rend les stratégies de type « relative value trading » classiques difficilement applicables en pratique avec une structure de type butterfly.

Par contre, elle ne condamne pas les stratégies de butterfly mais modifie les critères de décision (E/S) ainsi que les objectifs visés.

Quelles sont les stratégies possibles en pratique?

La dynamique du spread actuariel n'ayant plus les bonnes propriétés recherchées en « relative value trading », on va plutôt chercher à **monter des stratégies à portage positif pour lesquels le down-side risque sur le spread actuariel est jugé négligeable et/ou gérable**.

18. L'exercice 4 permettra d'illustrer la discussion formelle qui suit via le traitement numérique complet d'une position de butterfly de type « shift/twist-neutral »

19. Notons qu'il possible d'estimer la composante du spread actuariel due au seul facteur Butterfly en « priçant » les trois autres composantes de la façon suivante :

- Le mis-pricing zéro-coupon par le spread « zéro-coupon » (cf. Chapitre 3)
- La prime repo par le spread d'asset-swap (cf. Chapitre 5)
- Le biais de convexité en utilisant la formule donnée au paragraphe 4.2.3

Dans ce dernier cas, on utilisera la volatilité implicite sur les options sur contrats Futures LT (cf. Chapitre 7) comme proxy pour la volatilité du premier facteur de déformation de la courbe des taux actuariels.

20. Cf. Valtonen E. (1998), Barbells - A Nordic perspective, Research Paper Handelsbanken

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Ce type d'opportunité est en général plus rare mais peut néanmoins se produire, sur des marchés :

- Matures après un choc économique, monétaire ou budgétaire impliquant une déformation atypique de la courbe des taux
- Emergeants sur lesquels des anomalies dans la forme de la courbe des taux sont plus fréquentes du fait qu'ils sont généralement moins biens arbitrés que les marchés matures

De façon évidente, les deux situations pour lesquelles il est envisageable de monter ce type de stratégies sont celles où le spread actuariel est « exagérément » élevé (resp. « exagérément » faible) de sorte qu'il est possible de monter une position long butterfly (resp. short butterfly) à portage obligataire positif avec un down-side risque sur spread actuariel minimal.

Dans ce type de stratégie, on ne joue pas l'évolution « probable » du spread actuariel vers un niveau jugé plus « normal » mais on s'assure via une double analyse historique et prospective que le risque de divergence du spread actuariel est au moins « cappé ».

Quels sont les risques sur ce type de position et comment les gérer ?

Trois types de risque sont à prendre en compte :

- Repo
- Convexité
- Spread

Il faut en premier lieu prendre en compte la problématique « repo » lié au refinancement de la partie short du butterfly.

Le portage d'une position de butterfly ne pourra être « locké » que sur la durée des repos qui en général ne sont négociables que sur de courtes périodes. Cette situation nécessite de rouler les repos de la position de butterfly lorsqu'ils arrivent à échéance. **On a donc un risque de refinancement sur le repo de la position short du butterfly**. Par ailleurs, certains titres qui traitent régulièrement « special » peuvent donc apparaîtres « cher » sur le spread actuariel et au prix sur le repo (à « court terme ») sans que celà ne traduise une réelle opportunité d'arbitrage car la cherté sur le spread actuariel reflète la cherté moyenne anticipée sur le repo (à « long terme »).

Une position long butterfly est en général convexe-positive, nous l'avons montré au paragraphe 4.2.3.

Le risque résultant n'est pas symétrique mais dépend du sens du butterfly :

- <u>Long Butterfly :</u> Un choc inattendu et de forte amplitude (de l'ordre du %) sur le niveau général des taux (shift) aura un impact positif et « potentiellement illimité » en terme de P/L tandis qu'une variation plus faible qu'attendue (de l'ordre du bp) aura un impact (positif) négligeable sur le P/L. Dans les deux cas, on paye la prime de convexité.
- <u>Short Butterfly :</u> Un choc inattendu et de forte amplitude (de l'ordre du %) sur le niveau général des taux (shift) aura un impact négatif et « potentiellement illimité » en terme de P/L tandis qu'une variation plus faible qu'attendue (de l'ordre du bp) aura un impact (négatif) négligeable sur le P/L. Dans les deux cas, on reçoit la prime de convexité.

On retrouve ici le caractère « optionnel » des positions de taux gamma-positive (« long straddle ») ou gamma-negative (« short straddle ») que l'on retrouvera à plusieurs reprises dans la suite de ce cours.

Enfin, le dernier risque à prendre en compte est lié au « down-side » sur le spread de taux entre le barbell et le bullet. Les deux façons de gérer ce risque consistent soit à mettre un

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

stop-loss (on inverse la position lorsque le niveau de stop-loss est atteint) soit à moyenner de façon à améliorer à la fois le portage et le point mort de la position.

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/